

МАТЕМАТИК АНАЛИЗГА ҚИРИШ

1- §. Элементар функциялар

2.1.1. Агар x микдорнинг бирор D тўпламдан олинган ҳар бир қийматига бирор E тўпламдан олинган y микдорнинг бирдан-бир аниқ қиймати мос қўйилган бўлса, y ҳолда y ўзгарувчи микдор x ўзгарувчи микдорнинг *функцияси* дейилади.

x микдор эркин ўзгарувчи ёки *аргумент*, y микдор эса боғлиқ ўзгарувчи ёки *функция* дейилади. Функцияни белгилаш учун ушбу ёзувлардан фойдаланилади:

$$y=f(x), y=y(x), y=\varphi(x)$$

ва x, k .

x ўзгарувчининг $f(x)$ функция маънога эга бўладиган қийматлари тўплами функциянинг *аниқланиш соҳаси* дейилади ва $D(f)$ кўринишда белгиланади. $y=f(x)$ функциянинг $x=x_0$ даги қиймати, бунда $x_0 \in D(f)$, функциянинг *хусусий қиймати* дейилади ва y_0 ёки $f(x_0)$ кўринишда белгиланади. Шундай қилиб,

$$y_0 = f(x_0) \text{ ёки } y|_{x=x_0} = y_0.$$

Функциянинг қабул қиладиган қийматлари тўплами унинг *ўзгариш соҳаси* дейилади ва $E(f)$ билан белгиланади.

Оху текисликнинг $y=f(x)$ муносабатни каноатлантирувчи $M(x, y)$ нукталари тўплами $y=f(x)$ функциянинг *графи* дейилади.

2.1.2. Агар $y=f(x)$ функция $D(f)$ соҳани $E(f)$ соҳага ўзаро бир қийматли акслантирса, y ҳолда x ни y орқали бир қийматли ифодалаш мумкин:

$$x=\varphi(y).$$

Ҳосил бўлган функция $y=f(x)$ функцияга нисбатан *тесқари функция* дейилади.

$y=f(x)$ ва $x=\varphi(y)$ функциялар *ўзаро тесқари* функциялардир.

$x = \varphi(y)$ тескари функцияни, одатда, x ва y ларнинг ўринларини алмаштириш билан стандарт кўринишда ёзилади.

$$y = \varphi(x).$$

Ўзаро тескари $y = f(x)$ ва $y = \varphi(x)$ функцияларнинг графиклари биринчи ва учинчи координата чоракларининг биссектрисасига нисбатан симметрик. $y = f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси $y = \varphi(x)$ тескари функциянинг қийматлари соҳаси бўлади.

$y = \varphi(x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси D , қийматлар соҳаси V бўлсин, $y = f(u)$ функциянинг аниқланиш соҳаси V бўлиб, ўзгариш соҳаси I бўлсин, у ҳолда $y = f(\varphi(x))$ аниқланиш соҳаси D ва ўзгариш соҳаси I бўлган мураккаб функция ёки f ва φ функцияларнинг композицияси дейилади.

и ўзгарувчи *оралиқ ўзгарувчи* дейилади. $y = f(x)$ кўринишидаги функция *ошкор функция* дейилади. $F(x, y) = 0$ кўринишдаги тенглама ҳам, умуман айтганда x ва y ўзгарувчилар орасидаги функционал боғланишни беради. Бу ҳолда таърифга кўра y ўзгариш x нинг *ошкормас* функцияси бўлади. Масалан, $x^2 + y^2 = 4$ тенглама y ни x нинг ошкормас функцияси сифатида аниқлайди. Аниқланиш соҳаси $D(f)$ координаталар бошига нисбатан симметрик бўлган $f(x)$ функция x нинг ҳар қандай $x \in D(f)$ қиймати учун $f(-x) = f(x)$ (ёки $f(-x) = -f(x)$) муносабат бажарилса, *жуфт* (ёки *тоқ*) функция дейилади.

Жуфт функция графиги ординатлар ўкига нисбатан симметрик, тоқ функция графиги эса координатлар бошига нисбатан симметрикдир.

Агар $T > 0$ ўзгармас сон мавжуд бўлиб, ҳар бир $x \in D(f)$ ва $(x + T) \in D(f)$ да $f(x + T) = f(x)$ тенглик бажарилса, $f(x)$ функция *даврий функция* дейилади.

Айтилган хоссага эга бўлган T ларнинг энг кичиги T_0 *функциянинг даври* дейилади.

2.1.3. Қуйидаги функциялар *асосий элементар функциялар* дейилади:

а) $y = x^a$ даражали функция, бунда $a \in \mathbb{R}$; $D(f)$ ва $E(f)$ лар a га боғлиқ;

б) $y = a^x$ кўрсаткичли функция, бунда $a > 0$ ва $a \neq 1$; $D(f) = \mathbb{R}$ ва $E(f) = (0, +\infty)$;

в) $y = \log_a x$ логарифмик функция, бунда $a > 0$, $a \neq 1$; $D(f) = (0, +\infty)$ ва $E(f) = \mathbb{R}$;

г) тригонометрик функциялар:

$y = \sin x$, $D(f) = \mathbb{R}$ ва $E(f) = [-1, 1]$; $T_0 = 2\pi$;

$y = \cos x$, $D(f) = \mathbb{R}$ ва $E(f) = [-1, 1]$; $T_0 = 2\pi$;

$y = \operatorname{tg} x$, $D(f) = \{x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ ва $E(f) = \mathbb{R}$; $T_0 = \pi$;

$y = \operatorname{ctg} x$, $D(f) = \{x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ ва $E(f) = \mathbb{R}$; $T_0 = \pi$.

$y = \sec x$, $D(f) = \{x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ ва

$E(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$; $T_0 = 2\pi$.

$y = \operatorname{cosec} x$, $D(f) = \{x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ ва
 $E(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$; $T_0 = 2\pi$.

д) тескари тригонометрик функциялар:

$$y = \arcsin x, D(f) = [-1, 1] \text{ ва } E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$$

$$y = \arccos x, D(f) = [-1, 1] \text{ ва } E(f) = [0, \pi];$$

$$y = \operatorname{arctg} x, D(f) = \mathbb{R} \text{ ва } E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y = \operatorname{arccot} x, D(f) = \mathbb{R} \text{ ва } E(f) = (0, \pi);$$

$$y = \operatorname{arcsec} x, D(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \text{ ва } E(f) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$y = \operatorname{arccosec} x, D(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \text{ ва } E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Элементар функция деб асосий элементар функциялардан чекли сондаги арифметик амаллар ёрдамида тузилган мураккаб функцияларга айтилади.

1-дарсхона топшириғи

1. Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$; б) $y = \arcsin \frac{x-2}{2}$;

в) $y = \frac{1}{\lg(4-x^2)}$; г) $y = \sqrt{25-x^2} + \lg \sin x$.

Ж: а) $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$; б) $[0, 4]$;

в) $(-2, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$; г) $[-5, -\pi) \cup (0, \pi)$

2. Қуйидаги функцияларнинг ўзгариш соҳасини топинг:

а) $y = \sqrt{16-x^2}$; б) $y = 3\cos x - 1$; в) $y = 3^{-x^2}$.

Ж: а) $[0, 4]$; б) $[-4, 2]$; в) $(0; 1]$.

3. Қуйидаги функцияларнинг жуфт ёки тоқ функция эканини аниқланг:

а) $y = x^4 \sin 3x$; б) $y = x^4 - x^2 + x$; в) $y = \lg \cos x$.

Ж: а) тоқ; б) тоқ ҳам эмас, жуфт ҳам эмас; в) жуфт.

4. Қуйидаги функцияларнинг даврларини топинг:

а) $y = \sin 5x$; б) $y = \lg \cos 2x$; в) $y = \operatorname{tg} 3x + \cos 4x$.

Ж: а) $\frac{2\pi}{5}$; б) π ; в) π .

5. Мураккаб функцияларни асосий элементар функцияларнинг композициялари тарзида ифодаланг:

а) $y = \sqrt[5]{\operatorname{arctg} \sqrt{3x^2}}$; б) $y = \operatorname{Intg} \frac{\sqrt{x^2-1}}{4x}$.

1- мустақил иш

1. Функцияларнинг аниқланиш соҳа ва қирини топинг:

а) $y = \lg(3^{4x} - 9)$; б) $y = \frac{1}{x^2 - 6x + 5}$;

в) $y = \lg(-x^2 - 4x + 5)$.

Ж: а) $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; б) $(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$; в) $(-5, 1)$.

2. Берилган функцияларга мос келувчи тескари функцияларни топинг. Берилган ва топилган тескари функция графикларини чизинг:

а) $y = x^2$, агар $x \leq 0$;

б) $y = \begin{cases} -x, & \text{агар } x < 1, \\ x^2 - 2, & \text{агар } x \geq 1; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} x, & \text{агар } x \leq 0; \\ x^2, & \text{агар } x > 0; \end{cases}$

г) $y = \sqrt{1 - x^2}$, агар $x \in [-1, 0]$;

д) $y = \begin{cases} x, & \text{агар } x < 1, \\ x^2, & \text{агар } 1 \leq x \leq 4, \\ 2^x, & \text{агар } x > 4. \end{cases}$

3. Қуйидаги функцияларнинг жуфт ёки тоқлигини аниқланг:

а) $y = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$;

б) $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$;

в) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

г) $y = 2^x + 2^{-x}$.

Ж: а) жуфт; б) тоқ; в) тоқ; г) жуфт.

2-§. Элементар функцияларнинг графиклари

$f(x)$ функция графикини чизишда ҳар хил усуллар қўлланилади: нуқталар бўйича, графиклар билан амаллар бажариш, графикларни алмаштириш. $f(x)$ функция графикидан фойдаланиб содда алмаштиришлар ёрдамида мураккаброк функциялар графикларини ҳосил қилиш мумкин.

а) $y = f(x-a)$ функциянинг графиги $y = f(x)$ функция графикидан, бу графикни Ox ўқ бўйлаб $a > 0$ да ўнгга, $a < 0$ бўлганда эса чапга a бирлик суриш билан ҳосил қилинади.

б) $y=f(x)+b$ функция графиги $y=f(x)$ функция графигидан, бу графикни Oy ўқ бўйлаб $b>0$ да юқорига, $b<0$ да пастга b бирлик суриш билан ҳосил қилинади.

в) $y=f(kx)$ ($k\neq 0, k\neq 1$) функциянинг графиги $y=f(x)$ функция графигидан, унинг нукталари ординаталарини сақлаган ҳолда $|k|<1$ да абсциссаларини $\frac{1}{|k|}$ марта чўзиш билан, $|k|>1$ да эса абсциссаларини $|k|$ марта сиқиш билан ҳосил қилинади.

г) $y=mf(x)$ ($m\neq 0, m\neq 1$) функция графиги $y=f(x)$ функция графигидан, унинг нукталари мос абсциссаларини сақлаган ҳолда ординаталарини $|m|<1$ да $\frac{1}{|m|}$ марта қисил, $|m|>1$ да эса $|m|$ марта чўзиш орқали ҳосил қилинади.

д) $y=f(-x)$ функция графиги $y=f(x)$ функция графигидан, бу графикни Oy ўққа нисбатан симметрик акслантириш ёрдамида ҳосил қилинади.

е) $y=-f(x)$ функция графиги $y=f(x)$ функция графигидан, бу графикни Ox ўққа нисбатан симметрик акслантириш ёрдамида ҳосил қилинади.

ж) $y=|f(x)|$ функция графиги Ox ўқнинг $f(x)\geq 0$ бўладиган қисмларида $y=f(x)$ функция графиги билан бир хил бўлади. Ox ўқнинг $f(x)<0$ бўладиган қисмида бу графикни $y=f(x)$ функция графигини Ox ўққа нисбатан симметрик акслантириш ёрдамида ҳосил қилинади.

Мисол. $y=-2\sin(2x+2)$ функциянинг графигини $y=\sin x$ функция графигидан фойдаланиб чизинг.

Ечиш. $y=\sin x$ функция графигидан фойдаланиб, $y=-2\sin(2x+2)$ функция графигини чизиш қуйидаги шакл алмаштиришлар орқали амалга оширилади:

$$y_1=\sin 2x_1, y_2=-2\sin 2x_2, \\ y=-2\sin 2(x+1)=-2\sin(2x+2).$$

Геометрик нуктаи назардан бу 15-шаклдаги ясашларга олиб келади.

1. $0\leq x\leq 2\pi$ оралиқда $y=\sin x$ синусоидани чизамиз.

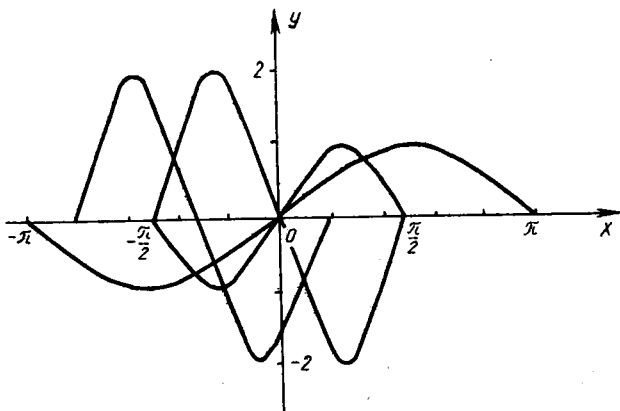
2. Синусоидада бир неча нукта белгилаймиз ва ординаталарини ўзгартирмай, абсциссаларини икки марта камайтирамиз:

$x_1=\frac{1}{2}x, y_1=y$. Ҳосил бўлган нукталарни силлиқ чизик билан

бирлаштириб, $y_1=\sin 2x_1$ функциянинг графигини чизамиз.

3. Ҳосил бўлган графикдаги нукталар абсциссаларини ўзгартирмай, ординаталарини 2 марта орттирамиз ва уларнинг ишораларини алмаштирамиз: $y_2=-2y_1, x_2=x_1$. Ҳосил бўлган нукталарни силлиқ чизик билан бирлаштириб, $y_2=-2\sin x_2$ функциянинг графигини чизамиз.

4. Охири графигни абсциссалар ўқи бўйича (-1) га кўчирамиз: $x=x_2-1, y=y_2$. Ҳосил қилинган нукталарни силлиқ чизик билан бирлаштириб, $y=-2\sin(2x+2)$ функция графигини чизамиз (15-шакл).



15- шакл

2- дарсхона топириги

Функциялар графикларини чизинг:

1. $y = 2\sin(2x - 1)$.
2. $y = -\operatorname{ctg}|x + 1|$.
3. $y = 1 + \lg(x + 2)$.
4. $y = \log_2|1 - x|$.
5. $y = -\sqrt{x^2 - 4x + 4}$.
6. $y = 1 - 3^{|x|}$.
7. $y = |x^2 - 7x + 12|$.

2- мустақил иш

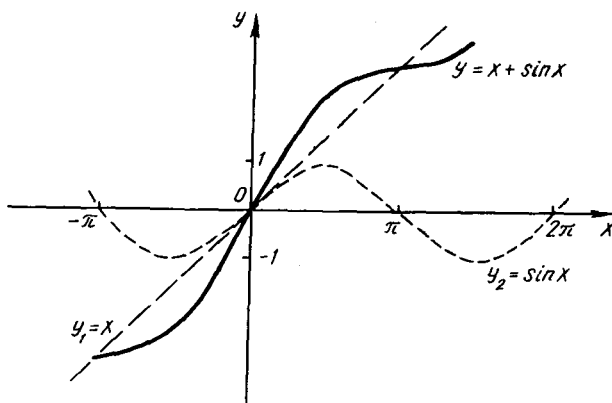
Функциялар графикларини чизинг:

1. $y = |3x + 4 - x^2|$.
2. $y = |\log_2(2x - 1)|$.
3. $y = 2(x - 1)^3$.
4. $y = 2\cos\frac{x - \pi}{3}$.
5. $y = \sin^2 x$.
6. $y = 1 - 2^{-x}$.

3- §. Икки функция йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва бўлинмасининг графиклари

Асосий элементар функциялар хоссаларидан фойдаланиб, уларнинг графикларини билган ҳолда, катта ҳисоблаш ишларини бажармай туриб, бошқа функцияларнинг мураккаб графикларини чизишни графикларнинг комбинациясига (йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва бўлинмасига) келтириш мумкин.

2.3.1. Шундай ҳоллар бўладики, $y = f(x)$ функция графигини графиклари осонгина чизиладиган $y_1 = f_1(x)$ ва $y_2 = f_2(x)$ функциялар йиғиндиси шаклида ифодалаш мумкин бўлади. Унда $y = f(x)$ функция графигини чизиш мос ординаталарни геометрик қўшишга келтирилади: $y = y_1 + y_2$.



16- шакл

Шуни таъкидлаймизки, икки функция айирмасини икки функциянинг тегишли йиғиндисига келтириш мумкин.

$$y = f_1(x) - f_2(x) = f_1(x) + (-f_2(x)).$$

1- м и с о л. Ушбу

$$y = x + \sin x$$

функция графигини чизинг.

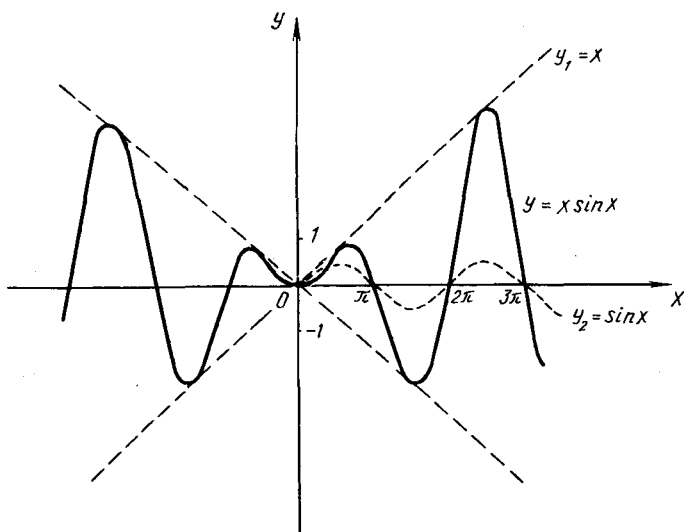
Е ч и ш. $y_1 = x$ ва $y_2 = \sin x$ деб олиб, битта чизманинг ўзида қўшилувчи функциялар графикларини чизамиз (пунктир чизиқлар).

Шу функциялар графикларини кесадиган бир қатор вертикал тўғри чизиқлар ўтказамиз. Шундан кейин бу графикларнинг мос ординаталарини геометрик қўшиб, изланаётган графикнинг бир қатор нукталарини топамиз, бу нукталарни узлуксиз эгри чизик билан бирлаштириб, изланаётган графикни ясаймиз (16- шаклдаги туташ чизик). Хосил бўлган график, тақрибий бўлади.

2.3.2. Ординаталарни геометрик кўпайтириш анча қийин. Аммо, шунга қарамай, агар $y_1 = f_1(x)$ ва $y_2 = f_2(x)$ функциялар графикларини олдиндан ясаб олинса, икки функциянинг $y = f_1(x) \cdot f_2(x)$ кўпайтмасини таҳлил қилиш кўпинча осонлашади. Таҳлил қилишда y_1 ва y_2 функциялар 0, 1 ва -1 га тенг бўладиган нукталарга алоҳида эътибор бериш керак.

2- м и с о л. $y = x \cdot \sin x$ функция графигини чизинг.

Е ч и ш. Берилган функция иккита тоқ функциянинг кўпайтмаси сифатида жуфт функция бўлишини пайқаймиз ва шу сабабли таҳлилни $x \geq 0$ лар учун ўтказамиз. $y_1 = x$ ва $y_2 = \sin x$ графикларни (пунктир чизиқлар) битта чизмада чизамиз (17- шакл).



17- шакл

$y_2 = \sin x = 0$ бўладиган нукталарда $y = y_1 \cdot y_2 = 0$ га эга бўламиз.

$y_2 = \sin x = 1$ бўладиган нукталарда $y = y_1 \cdot y_2 = x$ га эга бўламиз.

$y_2 = \sin x = -1$ бўладиган нукталарда $y = y_1 \cdot y_2 = -y_1 = -x$ ($y_3 = -x$ функция графигини чизамиз).

Бир қатор шундай нукталарни белгилаб ва оралик нукталар учун $|y| = |x \sin x| < |x|$ эканини ҳисобга олиб, $x \geq 0$ лар учун изланаётган графикка (туташ қизиқ) эга бўламиз. $x < 0$ да берилган функция жуфт функция бўлгани учун график Oy ўққа нисбатан симметрик акслантириш билан ҳосил қилинади (17- шакл).

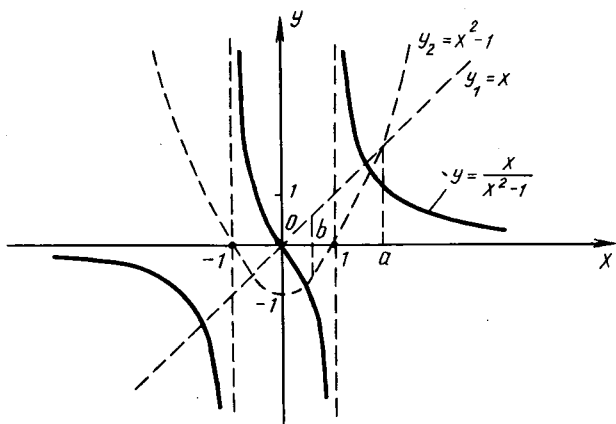
2.3.3. Икки функциянинг кўпайтмаси ҳақида айтилган мулоҳазаларнинг ҳаммаси икки функциянинг

$$y = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

бўлинмаси учун ҳам бир хилда тегишлидир.

Битта чизманинг ўзида $y_1 = f_1(x)$ ва $y_2 = f_2(x)$ функциялар графикларини чизиб, уларни таҳлил қилиш йўли билан $y = \frac{y_1}{y_2}$

бўлинма x га боғлиқ ҳолда қандай ўзгаришини текширамиз ва шу йўл билан изланаётган графикнинг умумий кўринишига эга бўламиз. Таҳлил қилишда асосий эътиборни y_1 ва y_2 функциялар қийматлари 0, 1 ва -1 га тенг бўладиган нукталарга, улар ўзаро тенг бўладиган ёки ишоралари билан фарқ қиладиган нукталарга қаратиш керак.



18- шакл

3- м и с о л. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ функция графикни чизинг.

Е ч и ш. Функция ток, шу сабабли $x \geq 0$ лар учунгина таҳлил қиламиз.

$y_1 = x$ ва $y_2 = x^2 - 1$ деб олиб, бу функцияларнинг $x \geq 0$ даги графикларини (пунктир чизик) чизамиз.

Э с л а т м а: а) $x = 0$ да $y_1 = 0$, шу сабабли, $\frac{y_1}{y_2} = 0$;

б) бирор $x = a$ да $y_1 = y_2$ бўлиб, $y = \frac{y_1}{y_2} = 1$ бўлиши равшан;

в) бирор $x = b$ да $y_1 = -y_2$ бўлиб, $y = \frac{y_1}{y_2} = -1$ бўлиши равшан;

г) $x = 1$ да $y_2 = 0$, $y_1 = 1$, шу сабабли $x = 1$ тўғри чизик вертикал асимптотадир.

д) $x \rightarrow \infty$ да $y \rightarrow 0$ мусбатлигича қолади, яъни абсциссалар ўқи горизонтал асимптота бўлишини кўрамиз. Бу фикрларнинг ҳаммасини бирлаштириб графикнинг умумий кўринишига (туташ чизик) эга бўламиз.

$y = \frac{x}{x^2 - 1}$ функциянинг ток эканлиги туфайли $x < 0$ да график координаталар бошига нисбатан симметрик акслантиришдан иборат бўлади (18- шакл).

3- дарсхона топшириғи

Функциялар графикларини чизинг:

1. $y = x^3 + 2x^2$.

4. $y = x^3 \cos x$.

2. $y = 2^x + \sin x$.

5. $y = \frac{\sin x}{1 + x^2}$.

3. $y = \sin 2x + 2\cos x$.